

## Dagens 15/9

1. Beräkna följande gränsvärden:

a.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{x+1} + 3^{x+2}}{4^{x+3} + 3^{x+4}}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1})$

2. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten  $x = 3$  för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{då } x < 3 \\ x - 3 & \text{då } x = 3 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{då } x > 3 \end{cases}.$$

## Svar

1. a.  $-1/4$                       b.  $-1$                       c.  $2$                       d.  $1/16$   
e.  $2$                               f.  $1/2$
2. högergränsvärde = vänstergränsvärde = gränsvärde =  $2$

## Dagens 17/9

1. Beräkna följande gränsvärden:

a.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{3x + 2}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} \arctan \frac{x}{x + 1}$

d.  $\lim_{x \rightarrow 1} \arctan \frac{x^2}{x + 1}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x + 2} - 2}{\sqrt{x} - 2}$

2. Beräkna högergränsvärde, vänstergränsvärde och gränsvärde i punkten  $x = 3$  för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{då } x < 3 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} & \text{då } x > 3 \end{cases}$$

3. Bestäm värdet på konstanten  $a$  så att  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + a}{x - 1}$  är ändligt och beräkna gränsvärdet.

4. Beräkna följande gränsvärden:

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \sin(x - 1)}{3(x^2 - 1)}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln(1 + 3x) - \ln(1 + x))$

d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \ln \sqrt{x}}{1 + e^{-x}}$

e.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 + 3x}{1 + 3x}$

f.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 + 3x}{1 + 3x}$

5. Kan funktionen  $f$  definieras i punkten  $x = 1$  så att  $f$  blir kontinuerlig i denna punkt?

a.  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

b.  $f(x) = \frac{3 \sin(x - 1)}{2(x^2 - 1)}$

c.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} & \text{då } 1 < x < 2 \\ \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x - 6} & \text{då } x < 1 \end{cases}$

d.  $f(x) = \arctan \frac{1}{(x - 1)^2}$

e.  $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$

6. Visa att ekvationen  $x^6 + 3x + 1 = 0$  har minst en reell lösning.

7. Visa att kurvorna  $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$  och  $y = x^4 + x^3 - 2x + 4$  har minst en gemensam skärningspunkt.

8. Beräkna derivatorna till följande funktioner och förenkla så långt som möjligt:

a.  $\frac{4x + 5}{2x + 3}$

b.  $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

c.  $(\sin x + \cos x) \sin x$

d.  $2\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 + 2x}$

e.  $(1 + 2x)^9$

f.  $\sin^9 x$

g.  $\sin^9 2x$

h.  $(x - x^2)e^{2x}$

i.  $(2x + 1)^3 (1 - x)^4$

9. Bestäm ekvationen för tangenten och normalen till kurvan

a.  $y = (1 - x)^9 (2x - 3)^8$  i punkten  $(2, -1)$ .

b.  $y = \frac{(1 - x)^8}{(2x - 3)^9}$  i punkten  $(2, 1)$ .

## Svar

1. a.  $4/3$                       b.  $2/3$                       c.  $\pi/4$                       d.  $\pi/2$                       e.  $1/4$                       f.  $\sqrt{3}$
2. högergränsvärde = 4, vänstergränsvärde = 2, gränsvärde finns inte.      3.  $a = -2$ , gränsvärdet = 3.
4. a.  $3/4$                       b.  $2/3$ .                      c.  $\ln 3$                       d. 0.                      e. 1                      f.  $e^2$
5. a. Ja,  $f(1) = \sqrt{3}$ .      b. Ja,  $f(1) = 3/4$ .      c. Ja,  $f(1) = \sqrt{4}$ .      d. Ja,  $f(1) = \sqrt{1/2}$       e. Nej.
8. a.  $\frac{2}{(2x+3)^2}$                       b.  $\frac{1}{1+\sin 2x}$                       c.  $\sin 2x + \cos 2x$
- d.  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$                       e.  $18(1+2x)^8$                       f.  $9 \cos x \sin^8 x$
- g.  $18 \cos 2x \sin^8 2x$                       h.  $(1 - 3x + x^2)e^{3x}$                       i.  $2(7x - 1)(2x + 1)^2(x - 1)^3$
9. a. Tangent:  $25x + y = 49$ . Normal:  $x - 25y = 27$ .
- b. Tangent:  $10x + y = 21$ . Normal:  $x - 10y + 8 = 0$ .